Mathematik für Biologen und Biotechnologen

Vorlesungskript aus dem Sommersemester 2025

Basierend auf Skripten von Matthieu Felsinger, Moritz Kaßmann, Jamil Chaker, Tim Schulze, Martin Spitz, Lars Eric Hientzsch, Lukas Wresch, Moritz Petschick

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Zu Beginn beschäftigen wir uns mit grundlegenden Begriffen und Definitionen.

1.1 Mengen

Eine formale Definition des Mengenbegriffs würde den Rahmen der Vorlesung sprengen; stattdessen schließen wir uns Georg Cantor's[1] Auffassung einer Menge an:

"*Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.*"

Die einfachste Möglichkeit eine Menge anzugeben ist die Aufzählung sämtlicher Elemente. Hierbei werden geschweifte Klammern zur Begrenzung einer Menge verwendet. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} && \text{eine Menge von Zahlen,} \\ B &= \{\text{Eiche, Birke, Tanne, Kiefer, Ahorn}\} && \text{eine Menge von Bäumen.} \end{aligned}$$

Wollen wir nur diejenigen Elemente einer Menge auswählen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, so bieten sich folgende Schreibweisen an:

$$\begin{aligned} G &= \{a \in A : a \text{ ist eine gerade Zahl}\} = \{2,4,6,8,10\}, \\ L &= \{b \in B : b \text{ ist Laubbaum}\} = \{\text{Eiche, Birke, Ahorn}\}. \end{aligned}$$

Oft ist eine Auflistung sämtlicher Elemente nicht möglich, etwa weil eine Liste zu umfangreich oder gar unendlich ist. Wenn keine Missverständnisse auftreten können, so ist eine Schreibweise mit Pünktchen möglich, z.B.

$$\begin{aligned} O &= \text{Menge aller Obstsorten} = \{\text{Apfel, Birne, Weintraube}, \dots\}, \\ U &= \text{Menge aller positiven, ungeraden Zahlen} = \{1,3,5,7,\dots\}. \end{aligned}$$

Element einer Menge zu sein, wird mit dem Zeichen $\in$ ausgedrückt. Nicht Element einer Menge zu sein, wird mit dem Zeichen $\notin$ ausgedrückt. Es gelten

$$\text{Orange } \in O \qquad \text{und} \qquad 22 \notin U.$$

Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, in Zeichen $A \subseteq B$, falls jedes Element aus A auch Element in B ist. Zum Beispiel ist die Menge aller Säugetiere eine Teilmenge der Menge aller Wirbeltiere. Mit dem Symbol $\varnothing$ wird die leere Menge bezeichnet. Sie ist die einzige Menge, die kein Element enthält. Diese Menge kommt sehr häufig vor, zum Beispiel gilt

$$\{b \in B : b \text{ ist keine Pflanze}\} = \varnothing = \{u \in U : u \text{ ist eine negative Zahl}\}.$$

In naturwissenschaftlichen Anwendungen treten verschiedene Mengen von Zahlen auf, etwa als Ergebnis von Messungen, zum Beispiel die Anzahl an Bakterien in einer Kulter,

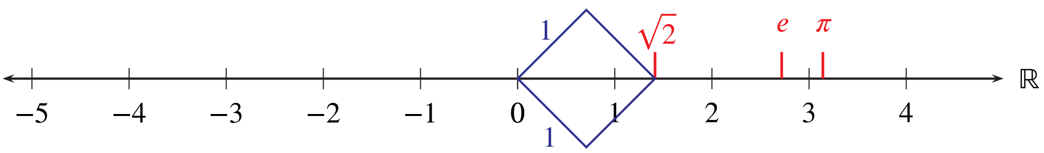
[1] deutscher Mathematiker (1845–1918), gilt insbesondere als Begründer der Mengenlehre

die Konzentration einer Kochsalzlösung oder der Winkel zwischen zwei Blättern einer Pflanze.

In der Mathematik haben sich folgende Schreibweisen für häufig auftretende Mengen von Zahlen eingebürgert:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1,2,3,4,5,\ldots\} && \text{Menge der Natürlichen Zahlen,} \\ \mathbb{Z} &= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} && \text{Menge der ganzen Zahlen,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} && \text{Menge der rationalen Zahlen,} \\ \mathbb{R} & && \text{Menge der reellen Zahlen.} \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen lassen sich nicht wie die übrigen Zahlbereiche auflisten (Stichwort: Überabzählbarkeit). Man kann sich $\mathbb{R}$ als Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen:



Man kann elementar beweisen, dass $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl, jedoch keine rationale Zahl ist. Es gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

und keine dieser Mengen stimmen überein. Häufig werden wir nur spezielle Teilmengen der Zahlengerade, sogenannte Intervalle, betrachten:

Definition 1.1 (Intervalle)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \text{ und } x \leqslant b\}, & (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \text{ und } x < b\}, \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \text{ und } x < b\}, & (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \text{ und } x \leqslant b\}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x\}, & (-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant a\}, \\ (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}, & (-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}. \end{aligned}$$

Wir nennen Intervalle der Form $[a,b]$ abgeschlossen und Intervalle der Form (a,b) offen. Des Weiteren bezeichnen wir Intervalle des Typs $(a,b]$ als linksoffen und Intervalle des Typs $[a,b)$ als rechtsoffen.

Definition 1.2 (Operationen auf Mengen)**.** Seien A und B zwei Mengen. Dann definieren wir durch

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{den Durchschnitt von } A \text{ und } B, \\ A \cup B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{die Vereinigung von } A \text{ und } B, \\ A \setminus B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ und } x \notin B\} && \text{die Differenz von } A \text{ und } B, \\ A \times B &:= \{(x,y) \,:\, x \in A \text{ und } y \in B\} && \text{die Produktmenge von } A \text{ und } B. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3. Ein paar Anmerkungen:

- "oder" im mathematischen Sinne ist kein exklusives "oder"; es können auch beide Eigenschaften gleichzeitig gelten.
- Wir verwenden die Notation $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$ und definieren induktiv den Koordinatenraum der d-Tupel durch $\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ für $d \geqslant 2$.
- Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element haben, d.h. $A \cap B = \varnothing$. $\Diamond$

Satz 1.4 (Rechenregeln für Operationen auf Mengen)**.** *Seien A, B und C Mengen. Dann gelten folgende Rechenregeln:*

(1) $A \cap B = B \cap A$ *und* $A \cup B = B \cup A$,

(2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *und* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

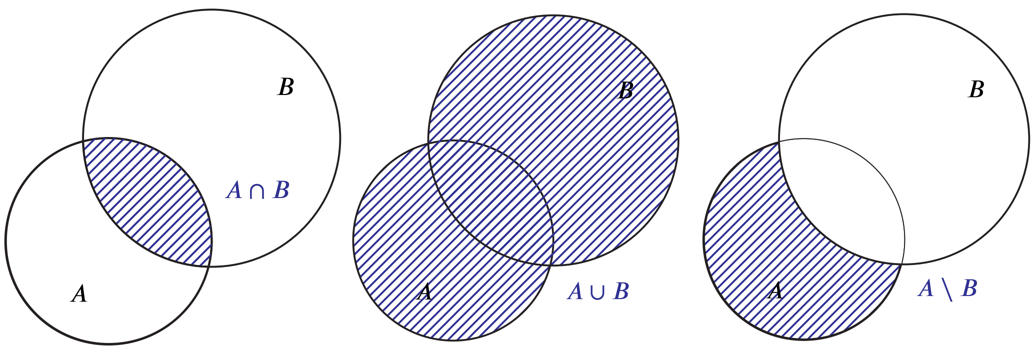


Abbildung 1: Veranschaulichung der Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung, Differenz

1.2 Der Absolutbetrag

Interessiert man sich für den Temperaturunterschied zwischen zwei Körpern oder den Konzentrationsunterschied von zwei Lösungen, so will man oftmals nicht wissen, ob die entsprechende Größe positiv oder negativ ist, sondern nur, welchen Wert sie unabhängig von ihrem Vorzeichen hat. Mathematisch gesehen bedeutet dies, dass man sich in diesen Fällen nur für den Abstand zweier Zahlen auf der Zahlengerade interessiert, nicht aber dafür, welche der beiden Zahlen die größere und welche die kleinere Zahl ist. Hier hilft der Absolutbetrag.

Definition 1.5 (Absolutbetrag)**.** Sei x eine reelle Zahl. Der Absolutbetrag von x ist gegeben durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Der Wert $|x-y|$ ist der Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengerade. Insbesondere entspricht der Betrag einer Zahl genau ihrem Abstand zum Nullpunkt.

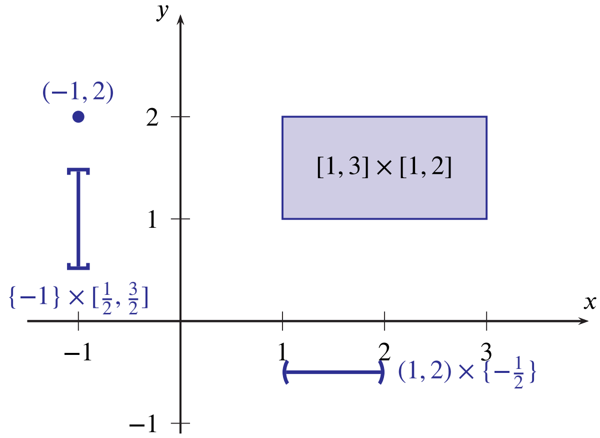
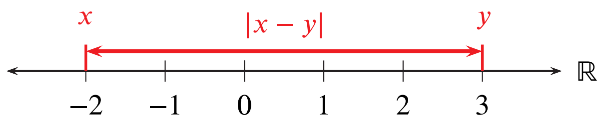


Abbildung 2: Wir werden sehr häufig der Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ begegnen. Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind dann anschaulich Teilflächen der Ebene und geordnete Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind Punkte in der Ebene.

Beispiel 1.6. Für $x = -2$ und $y = 3$ gilt $|x - y| = |-2 - 3| = |-5| = -(-5) = 5$.



$\Diamond$

Beispiel 1.7. Wie schreibt man die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 2| < \tfrac{1}{3}\right\}$$

als Intervall?

Dazu schreiben wir die Bedingung $|x - 2| < \frac{1}{3}$ mithilfe der Definition des Absolutbetrags um.

Fall 1: $x - 2 \geqslant 0$ ist äquivalent zu $x \geqslant 2$. Damit gilt

$$\frac{1}{3} > |x - 2| = x - 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{7}{3} > x.$$

Der erste Fall liefert also die Bedingung $2 \leqslant x < \frac{7}{3}$, d.h. $x \in \left[2, \frac{7}{3}\right)$.

Fall 2: $x - 2 < 0$ ist äquivalent zu $x < 2$. Damit gilt

$$\frac{1}{3} > |x - 2| = 2 - x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{5}{3}.$$

Der zweite Fall liefert also die Bedingung $\frac{5}{3} < x < 2$, d.h. $x \in \left(\frac{5}{3}, 2\right)$. Die Kombination beider Fälle liefert daher

$$x \in \left(\tfrac{5}{3}, 2\right) \text{ oder } x \in \left[2, \tfrac{7}{3}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{3}\right),$$

d.h.

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 2| < \tfrac{1}{3}\right\} \;=\; \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{3}\right).$$

$\Diamond$

Satz 1.8 (Eigenschaften des Absolutbetrags)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

- $|x| \geqslant 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$,
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

1.3 Abbildungen

Definition 1.9 (Abbildungen)**.** Sind D und W Mengen, so versteht man unter einer Abbildung von D nach W eine Vorschrift f, die jedem $x \in D$ genau ein $f(x) \in W$ zuordnet. Dabei heißt D der Definitionsbereich und W der Wertevorrat von f. Eine gebräuchliche Schreibweise für Funktionen ist

$$f : D \to W, \qquad x \mapsto f(x).$$

Beispiel 1.10.

- Sei T die Menge aller Tiere. Bezeichne mit f die Vorschrift, die jedem Tier die Anzahl seiner Beine zuordnet. Dann ist

  $$f : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad t \mapsto f(t),$$

  eine Abbildung.
- Die Quadratfunktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto f(x) = x^2$.
- Der Absolutbetrag $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$. $\Diamond$

Häufig sind wir nicht an allen Funktionen interessiert, sondern nur jenen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen.

Definition 1.11 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)**.** Eine Abbildung $f : D \to W$ heißt

- injektiv, wenn (für alle $x_1, x_2 \in D$) aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$ gelten muss.
- surjektiv, wenn es zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ gibt mit $y = f(x)$.
- bijektiv, sie injektiv und surjektiv ist.

Die Definitionen verdeutlichen die Wichtigkeit von Definitionsbereich und Wertevorrat einer Abbildung bezüglich ihrer Eigenschaften. Wir wollen kurz die oben definierten Begriffe kommentieren:

- Bei einer injektiven Abbildung $f : D \to W$ wird jedes Element $y \in W$ höchstens einmal (d.h. ein oder kein mal) als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Es werden also nie zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in D$ auf dasselbe Element des Wertevorrats abgebildet.

- Bei einer surjektiven Abbildung $f : D \to W$ wird jedes Element $y \in W$ mindestens einmal als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Zu jedem Element des Wertevorrats $y \in W$ gibt es also mindestens ein Element des Definitionsbereich $x \in D$, sodass y als Funktionswert von x realisiert wird.

- Bei einer bijektiven Abbildung $f : D \to W$ wird jedes Element $y \in W$ genau einmal als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Somit gibt es zu jedem Element des Wertevorrats $y \in W$ genau ein Element des Definitionsbereich $x \in D$, sodass $y = f(x)$ gilt.

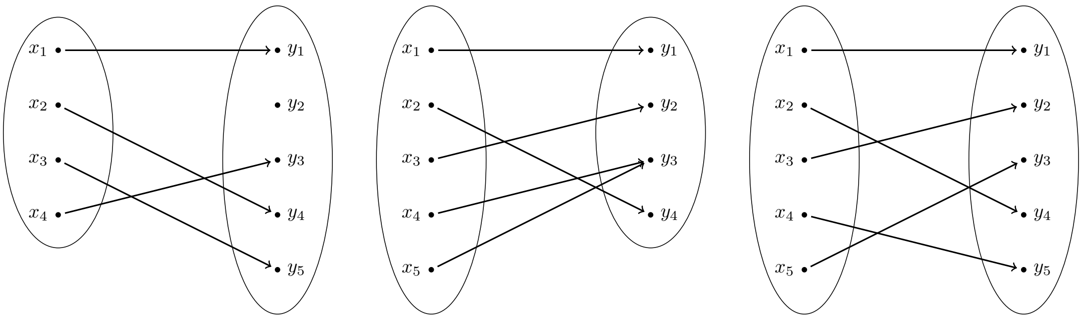


Abbildung 3: Veranschaulichung einer injektiven (links), einer surjektiven (mitte) und einer bijektiven (rechts) Abbildung.

Die linke Abbildung in Abbildung 3 bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ab. Hierbei handelt es sich um eine injektive Abbildung, da auf jedes Element aus W höchstens einmal abgebildet wird. Die Abbildung ist jedoch nicht surjektiv, da auf das Element y_2 nicht abgebildet wird.
Die mittlere Abbildung in Abbildung 3 bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ab. Die Abbildung ist surjektiv, da auf jedes Element aus W mindestens einmal abgebildet wird. Sie ist jedoch nicht injektiv, da x_4 und x_5 auf das Element y_3 abbilden.
Die rechte Abbildung in Abbildung 3 bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ab. Die Abbildung ist bijektiv, da jedem Element aus W genau ein Element aus D zugeordnet ist.

Beispiel 1.12.

- Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist injektiv, aber nicht surjektiv.

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$, ist surjektiv, aber nicht injektiv.

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv, noch surjektiv.

- Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$, ist bijektiv. $\Diamond$

Definition 1.13 (Verkettung von Funktionen)**.** Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ und $g : A \to B$ Funktionen. Dann heißt die Funktion $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) \;=\; f(g(x))$$

Verkettung oder Komposition von f und g.

Beispiel 1.14. Wir können $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ schreiben als Verkettung der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$; es gilt $h = f \circ g$. $\Diamond$

1.4 Summen und Produkte

Oft möchte man die Summe mehrerer (vielleicht sogar unendlich vieler) Summanden bilden und mit derart “langen” Ausdrücken bequem rechnen können. Bezeichnet a_1 den ersten Summanden, a_2 den zweiten Summanden, ... und a_n den n-ten Summanden, so möchte man gerne eine kompakte Schreibweise für $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ zur Verfügung haben.

Definition 1.15 (Summensymbol)**.** Sei $n \geqslant 1$. Dann setzt man

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Da der Laufindex nur als Markierung der einzelnen Terme fungiert, kann er durch ein beliebiges anderes Symbol ersetzt werden, wenn dies gleichzeitig an allen Stellen geschieht, an denen der Index auftaucht, d.h. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Beispiel 1.16.

- $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$
- $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$ $\Diamond$

Betrachtet man verallgemeinernd Summen, bei denen die Summation nicht bei 1, sondern bei einer anderen ganzen Zahl $m < n$ beginnt, so schreibt man entsprechend

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \;:=\; a_m + \ldots + a_n.$$

Zudem setzt man noch $\sum_{k=n}^{n} a_k := a_n$ und $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$, falls $m > n$.

Satz 1.17 (Rechenregeln für das Summensymbol)**.** *Seien $\ell, m, n, N \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$ und $\ell < N$. Dann gelten folgende Rechenregeln:*

(1) $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$,

(2) $\sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k - b_k)$,

(3) $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=\ell}^{N} b_j\right) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{j=\ell}^{N} a_k \cdot b_j = \sum_{j=\ell}^{N} \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot b_j$,

(4) $\sum_{k=m}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$, *wobei* $c \in \mathbb{R}$,

(5) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}$.

In gleicher Weise wie Summen durch das Symbol Σ kompakt geschrieben werden können, kürzt man Produkte mit dem Symbol Π ab.

Definition 1.18 (Produktsymbol)**.** Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$. Dann setzt man

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Zudem setzt man $\prod_{k=n}^{n} a_k := a_n$ und $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$, falls $m > n$.

Beispiel 1.19. $\prod_{k=1}^{4} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. $\Diamond$

Satz 1.20 (Rechenregeln für das Produktsymbol)**.** *Seien $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$. Dann gelten folgende Rechenregeln:*

(1) $\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$,

(2) $\frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k} = \prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k}$,

(3) $\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}$.

2 Elementare Funktionen

Wir werden uns für den Rest dieser Veranstaltung nur noch mit Abbildungen beschäftigen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen der reellen Zahlen sind. Solche Abbildungen nennen wir Funktionen. Wir veranschaulichen Funktionen $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$, indem wir ihren Graphen zeichnen.

Definition 2.1 (Graph einer Funktion)**.** Sei $f : D \to W$ eine Funktion. Der Graph von f ist gegeben durch

$$\Gamma_f := \big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\big\}.$$

Beispiel 2.2. Den Absolutbetrag definiert man als eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertevorrat $[0, \infty)$:

$$|\cdot| \colon \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \mapsto |x|$$

erklärt. Diese Funktion ist nicht injektiv, jedoch surjektiv, vgl. Abbildung 4.
Man könnte den Absolutbetrag auch als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, definieren. Diese wäre nicht surjektiv. $\Diamond$

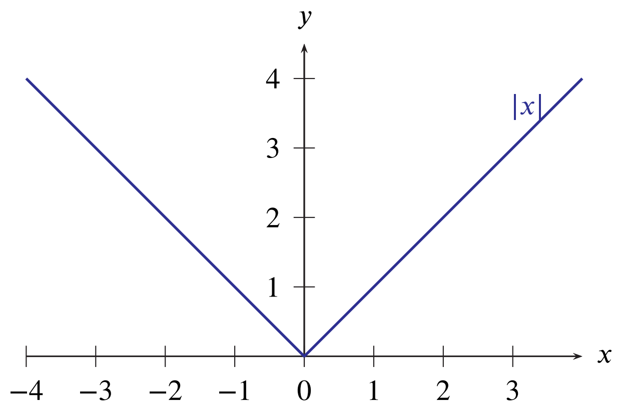


Abbildung 4: Graph der Betragsfunktion $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

Wir widmen uns nun in den folgenden Abschnitten einigen prominenten Funktionen.

2.1 Lineare Funktionen

Definition 2.3 (Lineare Funktion)**.** Eine lineare Funktion $f : D \to W$ ist durch die Abbildungsvorschrift

$$f(x) = mx + b, \qquad m, b \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Bemerkung 2.4. Der Begriff “lineare Funktion” ist problematisch, da lineare Funktionen im Allgemeinen (außer für $b = 0$) keine linearen Abbildungen im Sinne der linearen Algebra sind. $\Diamond$

Im Fall $D = W = \mathbb{R}$ ist der Graph einer linearen Funktion eine Gerade. Hierbei gibt m die Steigung der Geraden an und b den Punkt, an dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Es ist ausreichend zwei Funktionswerte einer linearen Funktion zu kennen, um m und b zu berechnen. Angenommen, wir kennen für zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Dann lassen sich m und b durch

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{und} \qquad b = f(x_1) - mx_1$$

bestimmen.

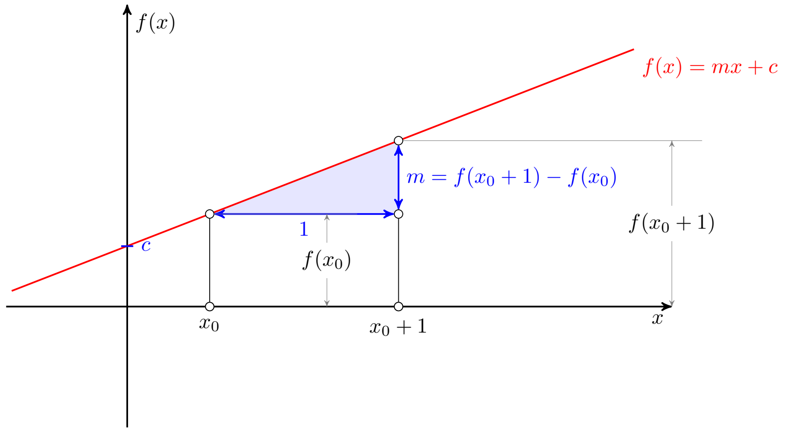


Abbildung 5: Der Graph einer linearen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. m heißt Steigung von f und c heißt y-Achsenabschnitt von f.

Beispiel 2.5. Welche lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geht durch die Punkte $(1, 2)$ und $(3, 7)$? Wegen $f(1) = 2$ und $f(3) = 7$ erhalten wir

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 2}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

und

$$b = f(x_1) - mx_1 = 2 - \frac{5}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2},$$

d.h. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$. ♢

2.2 Quadratische Funktionen

Definition 2.6 (Quadratische Funktion)**.** Eine quadratische Funktion $f : D \to W$ ist durch die Abbildungsvorschrift

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Der Graph einer quadratischen Funktion wird manchmal auch als Parabel bezeichnet.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst den Fall $b, c = 0$, d.h. die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = ax^2$. Die Parabel zu einer solchen Funktion besitzt den Scheitelpunkt $S = (0, 0)$ und ist symmetrisch zur y-Achse. Im Spezialfall

$a = 1$ wird der zugehörige Funktionsgraph Normalparabel genannt. Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gibt die Richtung der Öffnung der Parabel an. Des Weiteren lässt sich aus dem Wert a ablesen, ob die zugehörige Parabel aus einer Streckung oder Stauchung der Normalparabel entsteht:

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.
- $|a| < 1$: Die Parabel ist gestaucht.
- $|a| > 1$: Die Parabel ist gestreckt.

Der Parameter c gibt den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse an (der sogenannte y-Achsenabschnitt), d.h. eine Veränderung des Wertes c bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der y-Achse. Der Parameter b gibt an, ob und wir stark die Funktion im y-Achsenschnittpunkt wächst oder fällt.

Um den Scheitelpunkt im allgemeinen Fall zu bestimmen, benutzt man das Prinzip der quadratischen Ergänzung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \end{aligned}$$

d.h. $S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

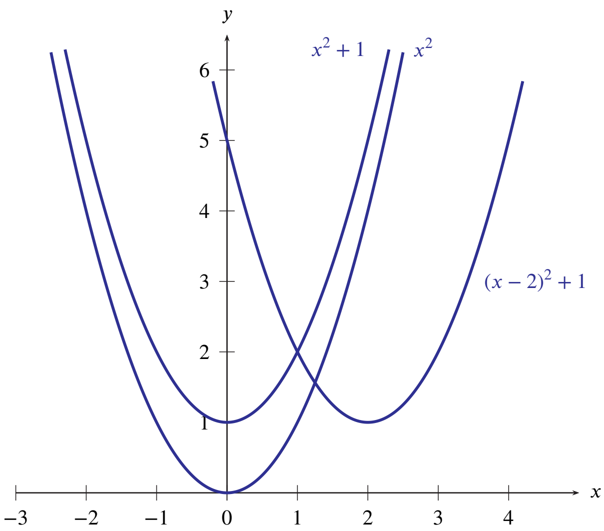


Abbildung 6: Graphen ausgewählter quadratischer Funktionen

Beispiel 2.7. Betrachte die quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Der Scheitelpunkt der durch diese Funktion gegebenen Parabel ist $S = \left(-\frac{(-3)}{2\cdot 2}, -\frac{(-3)^2}{4\cdot 2} + 4\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$. $\lozenge$

Durch eine quadratische Ergänzung lassen sich übrigens auch die Nullstellen quadratischer Funktion bestimmen.

Satz 2.8 (Nullstellen quadratischer Funktionen)**.** *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Die quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

besitzt

- *im Fall $b^2 - 4ac > 0$ die beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,*
- *im Fall $b^2 - 4ac = 0$ die einzige Lösung $x = -\frac{b}{2a}$,*
- *im Fall $b^2 - 4ac < 0$ keine reelle Lösung.*

Beispiel 2.9.

- Die Gleichung $x^2 + 2x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.
- Die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 0$ hat die einzige Lösung $x = -1$.
- Die Gleichung $x^2 + 2x + 5 = 0$ besitzt keine reellen Lösungen. $\lozenge$

2.3 Umkehrfunktionen und Lösungen von Gleichungen

Definition 2.10 (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion. Wir bezeichnen als Umkehrfunktion f^{-1} von f die eindeutige Funktion $f^{-1} : W \to D$, welche

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{für alle } x \in D$$

und

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \text{für alle } y \in W$$

erfüllt.

Vorsicht: Man beachte, dass im Allgemeinen **nicht** $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ gilt!

Rechnerisch ermittelt man den Funktionsterm der Umkehrabbildung f^{-1} durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x. Insbesondere ist also für $b \in W$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = b$ durch $x = f^{-1}(b)$ gegeben.

Vorsicht: In vielen Fällen ist der Wertevorrat der Umkehrfunktion zu klein, um alle Lösungen einer Gleichung zu finden.

Beispiel 2.11. Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = 5, \qquad x \in \mathbb{R},$$

sind $x_1 = \sqrt{5}$ und $x_2 = -\sqrt{5}$. Die Umkehrfunktion liefert aber nur die Lösung $x = \sqrt{5}$. $\lozenge$

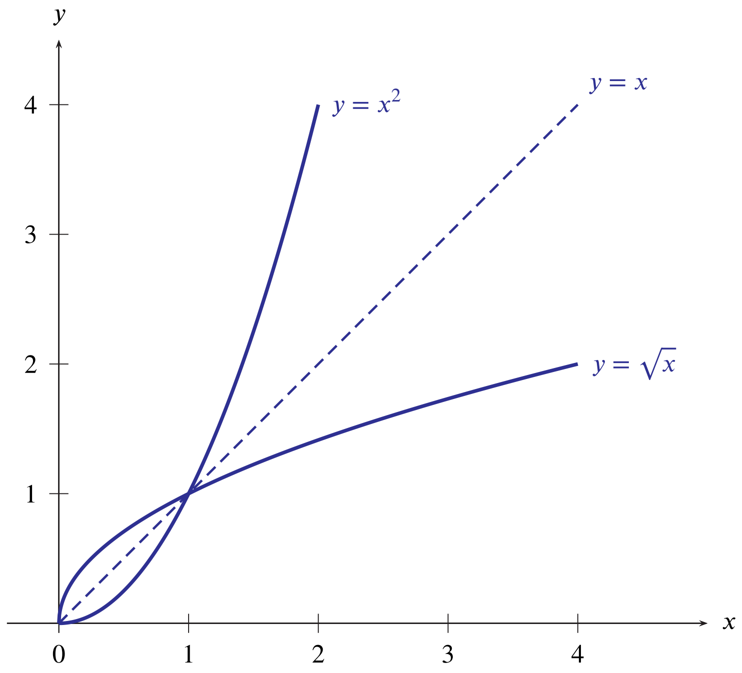


Abbildung 7: Der Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ entsteht aus dem Graphen von $f(x) = x^2$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

2.4 Potenzfunktionen

Definition 2.12 (Potenzfunktion)**.** Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty), \qquad x \mapsto f(x) = x^a.$$

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(1) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ Faktoren}}.$$

Zudem setzen wir $x^0 := 1$. Diese Definition ist für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(2) Für $a \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0$ setzen wir

$$x^a := \frac{1}{x^{-a}}.$$

Diese Definition ist nur noch für alle $x \neq 0$ möglich.

(3) Für $a = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^n$. Man schreibt auch $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Diese Definition ist nur für $x \geqslant 0$ möglich.

(4) Für $a = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Diese Definition ist nur noch für $x > 0$ möglich.

(5) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

$$x^1,\ x^{1{,}4},\ x^{1{,}41},\ x^{1{,}414},\ \ldots$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung. Auch diese Definition ist nur für $x > 0$ möglich.

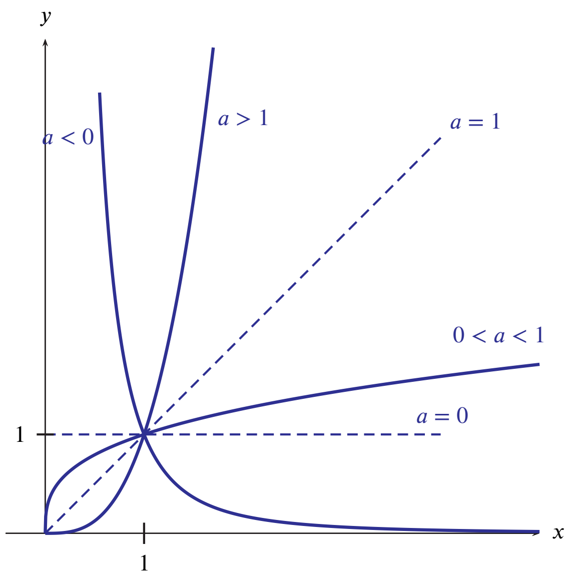


Abbildung 8: Qualitative Skizze einiger Potenzfunktionen mit Funktionsterm x^a.

Satz 2.13 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in (0, \infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$,
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$,
- $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$.

2.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition 2.14 (Exponentialfunktion)**.** Für jedes $a \in \mathbb{R}$ nennen wir die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad x \mapsto \exp_a(x) \ = \ a^x$$

die Exponentialfunktionen zur Basis a.

Aus den Rechenregeln für Potenzen ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften der Exponentialfunktionen.

Satz 2.15 (Rechenregeln für Exponentialfunktionen)**.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $a, b \in (0, \infty)$ *gelten*

- $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$,
- $\exp_a(x) \cdot \exp_b(x) = \exp_{a \cdot b}(x)$,
- $\big(\exp_a(x)\big)^y = \exp_a(x \cdot y)$.

Die Funktionen $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sind für alle $a \neq 1$ bijektiv, d.h. sie besitzen Umkehrfunktionen.

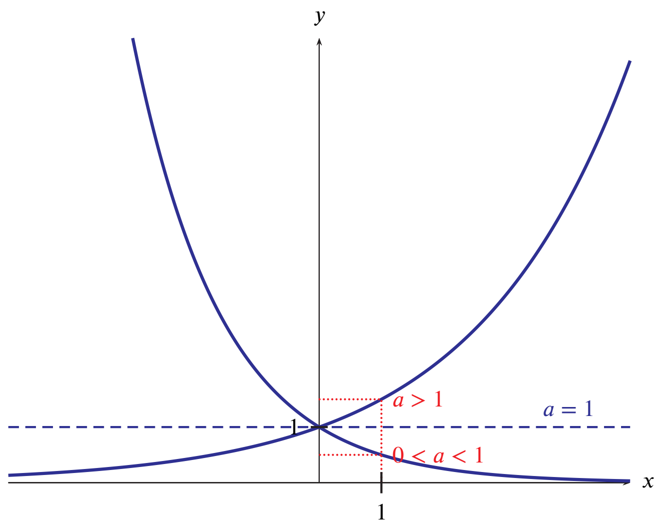


Abbildung 9: Qualitative Skizzen von drei ausgewählten Exponentialfunktionen

Definition 2.16 (Logarithmusfunktionen)**.** Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Die Umkehrabbildung

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_a(x),$$

der Exponentialfunktion $\exp_a$ nennt man Logarithmus zur Basis a.

Es gilt also

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

für alle $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.
Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktionen ergeben sich folgende Eigenschaften der Logarithmusfunktionen, auch Logarithmengesetze genannt.

Satz 2.17 (Logarithmengesetze)**.** *Seien* $x, y \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{R}$ *und* $a, b > 0$ *mit* $a, b \neq 1$. *Dann gelten*

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$,
- $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

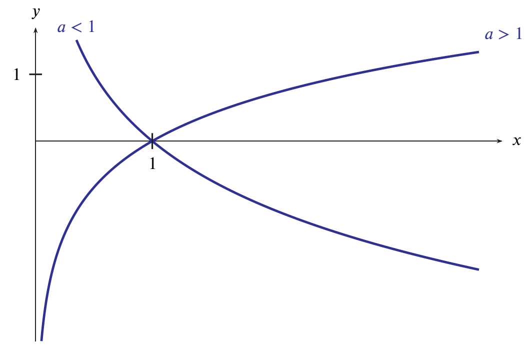


Abbildung 10: Qualitative Skizzen von zwei ausgewählten Logarithmusfunktionen

Unter allen Basen $a > 0$ gibt es eine Basis, die eine ganz besondere Rolle spielt. Sie ist die einzige, die

$$\exp_a'(x) \;=\; \exp_a(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, wobei $\exp_a'$ die Ableitung von $\exp_a$ bezeichnet (mehr dazu im nächsten Kapitel). Die Basis wird mit e bezeichnet und Eulersche Zahl genannt. Sie ist irrational und es gilt $\mathrm{e} \approx 2,7183$. Wir werden im Folgenden

$$\exp \;:=\; \exp_a \qquad \text{und} \qquad \ln \;:=\; \log_{\mathrm{e}}$$

setzen.

2.6 Wachstumsmodelle

In diesem Abschnitt werden wir einige Wachstumsmodelle besprechen.

2.6.1 Exponentielles Wachstum, exponentieller Zerfall

Die Exponentialfunktion nimmt eine bedeutende Rolle ein bei der Modellierung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen in der Natur.

Definition 2.18 (Exponentielles Wachstum)**.** Ein exponentielles Wachstum liegt vor, wenn das prozentuale Wachstum pro Zeiteinheit konstant ist. Hat das prozentuale Wachstum pro Zeiteinheit einen konstanten negativen Wert, so sprechen wir von exponentiellem Zerfall.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel: Wir betrachten eine Bakterienkultur, die sich innerhalb eines Zeitraums von 24 Stunden verdoppelt, egal, wann dieser Zeitraum beginnt. Es liegt ein exponentielles Wachstum vor. Wenn nun $f(t)$ die Anzahl von Bakterien zum Zeipunkt t (Stunden nach Beobachtungsbeginn) beschreibt, so würde für $t \geqslant 0$ gelten:

$$f(t) = f(0) \cdot 2^{\frac{t}{24}}. \tag{1}$$

Hierbei ist $f(0)$ die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$, d.h. zum Beginn der Beobachtung. Wir beweisen kurz, dass dieser Funktionsterm ein exponentielles Wachstum beschreibt. Für jedes $t \geqslant 0$ und $s \geqslant 0$ gilt

$$f(t+s) \;=\; f(0) \cdot 2^{\frac{t+s}{24}} \;=\; f(0) \cdot 2^{\frac{t}{24}} \cdot 2^{\frac{s}{24}} \;=\; f(t) \cdot 2^{\frac{s}{24}}.$$

Das bedeutet, dass innerhalb von s Zeiteinheiten die Bakterienkultur um den Faktor $2^{\frac{s}{24}}$ wächst, also um $(2^{\frac{s}{24}} - 1) \cdot 100$ Prozent. Hierbei spielt t, der Beginn des Zeitintervalls, keine Rolle, d.h. das prozentuale Wachstum pro Zeiteinheit ist konstant.

Es ist wichtig zu beobachten, dass man die Basis der obigen exponentiellen Funktion beliebig wechseln kann. Zum Beispiel gilt

$$2^{\frac{t}{24}} = 3^{\log_3\left(2^{\frac{t}{24}}\right)} = 3^{\frac{t}{24}\cdot\log_3(2)} = 3^{\frac{t}{24}\cdot\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}.$$

Der exponentielle Zerfall wird ebenso durch eine Exponentialfunktion beschrieben. Hierbei muss die Basis $a \in (0,1)$ gewählt werden. Zum Beispiel beschreibt die Funktion

$$f : [0,\infty) \to (0,\infty), \qquad t \mapsto f(t) = 2^{-t} = \mathrm{e}^{-t\cdot\ln(2)},$$

einen Vorgang, bei dem pro Zeiteinheit der betrachtete Stoff halbiert wird.

Wir wollen nun eine allgemeine Form des Funktionsterms angeben. Vorgänge, die exponentiell wachsen bzw. zerfallen, genügen im Allgemeinen der Gesetzmäßigkeit

$$y(t) = y(t_0) \cdot \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}. \tag{2}$$

Hierbei haben die auftretenden Größen folgende Bedeutung:

t_0:	Startzeitpunkt der Beobachtung (häufig $t_0 = 0$)
$t - t_0$:	Verstrichene Zeit seit Beginn der Beobachtung
$y(t_0)$:	Anfangsbestand der betrachteten Größe zu Beginn der Beobachtung
$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:	Wachstums– bzw. Zerfallsrate. Dabei bedeutet $\lambda > 0$: echtes Wachstum, d.h. aus $t_2 > t_1$ folgt $y(t_2) > y(t_1)$ $\lambda < 0$: echter Zerfall, d.h. aus $t_2 > t_1$ folgt $y(t_2) < y(t_1)$

Bemerkung 2.19. Die zum Zeitpunkt $t > 0$ vorhandene Menge $y(t)$ einer radioaktiven Substanz genüge dem oben beschriebenen Gesetz (2). Oft ist in dieser Art von Anwendungen nicht $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, sondern die Halbwertszeit $T_h > 0$. Wie ergibt sich λ aus T_h? Aus der definierenden Eigenschaft der Halbwertszeit ergibt sich, dass für jedes $t \geqslant t_0$ gilt

$$\frac{y(t+T_h)}{y(t)} = \frac{1}{2}.$$

Einsetzen des Wachstumgesetzes (2) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{y(t+T_h)}{y(t)} = \frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{y(t_0)\cdot \mathrm{e}^{\lambda(t+T_h-t_0)}}{y(t_0)\cdot \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}}}_{=\mathrm{e}^{\lambda T_h}} = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda T_h = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln(2)}{T_h}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Beispiel 2.20. Wir betrachten wieder eine Bakterienkultur, die sich alle 24 Stunden verdoppelt. Zum Beginn der Beobachtung sind es 400 Bakterien. Nach wie vielen Stunden werden es 5000 Bakterien sein?

Da es sich um ein exponentielles Wachstum handelt, können wir Gleichung (2) verwenden. Wir haben $y(t_0) = y(0) = 400$. Zudem folgt aus

$$\frac{y(t+24)}{y(t)} = 2$$

(analog zu obiger Rechnung) $\lambda = \frac{\ln(2)}{24}$. Wir suchen nach dem Zeitpunkt t, der $y(t) = 5000$ erfüllt, d.h.

$$5000 = y(t) = y(t_0) \cdot \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} = 400 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{24}t}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 400 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{24}t} = 5000 &\iff \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{24}t} = \frac{5000}{400} \iff \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{24}t} = \frac{25}{2} \\ &\iff \frac{\ln(2)}{24}t = \ln\left(\tfrac{25}{2}\right) \iff t = 24 \cdot \frac{\ln\left(\frac{25}{2}\right)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Nach $t \approx 87.453$ Stunden leben 5000 Bakterien in er Kultur.
Alternativ kann man auch $f(t) = f(0) \cdot 2^{\frac{t}{24}}$ (siehe Gleichung (1)) verwenden:

$$\begin{aligned} 400 \cdot 2^{\frac{t}{24}} = 5000 &\iff 2^{\frac{t}{24}} = \frac{5000}{400} \iff 2^{\frac{t}{24}} = \frac{25}{2} \\ &\iff \frac{t}{24} = \log_2\left(\tfrac{25}{2}\right) \iff t = 24 \cdot \log_2\left(\tfrac{25}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten erneut $t \approx 87.453$. Das ist kein Zufall, denn

$$2^{\frac{t}{24}} = \mathrm{e}^{\ln(2^{\frac{t}{24}})} = \mathrm{e}^{\frac{t}{24}\cdot\ln(2)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{24}t}. \qquad \Diamond$$

2.6.2 Beschränktes Wachstum, beschränkter Zerfall

Nehmen wir von einer Population an, dass sie exponentiell wächst, so impliziert dies gemäß der Gesetzmäßigkeit (2) ein Wachstum über jede Grenze hinaus. Vielen Wachstumsvorgängen in der Natur sind aber oftmals natürliche Grenzen gesetzt, z.B. dem Wachstum von Seerosen auf einem Teich. Bei solchen Vorgängen verlangsamt sich das Wachstum, je näher sich der Bestand $y(t)$ der sogenannten Sättigungsschranke S nähert. Ein solcher Vorgang kann durch eine Funktion

$$\boxed{y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(t) = S - \big(S - y(t_0)\big) \cdot e^{-k(t-t_0)},} \tag{3}$$

($S \in \mathbb{R}$, $k > 0$) beschrieben werden. Der Parameter k ist die sogenannte Wachstumskonstante. Hier liegt Wachstum vor, wenn $y(t_0) < S$ ist. Für $y(t_0) > S$ handelt es sich um einen Zerfallsprozess.

Bemerkung 2.21. Natürlich kann in Anwendungen, in denen nur die Zuordnungsvorschrift bestimmt werden soll, direkt mit dem Ansatz

$$y(t) = S - \big(S - y(t_0)\big) \cdot a^{t-t_0},$$

($a > 0$) gearbeitet werden. Dann entspricht $a = e^{-k}$. $\Diamond$

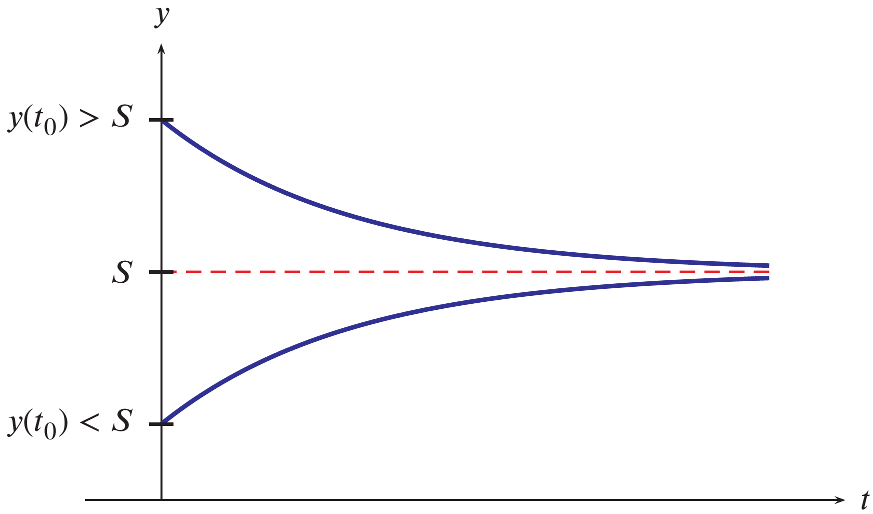


Abbildung 11: Qualitative Skizze eines beschränkten Wachstums- und Zerfallsprozess.

Beispiel 2.22. Eine 85° C heiße Flüssigkeit kühlt bei einer Raumtemperatur von 22° C ab. Dieser Abkühlungsprozess genügt der Gesetzmäßigkeit (3), d.h. wenn $y(t)$ die Temperatur (in ° C) der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t (in min) bezeichnet, dann gelten $y(0) = 85$ und für ein noch zu bestimmendes $k > 0$

$$y(t) \;=\; 22 - (22 - 85) \cdot \mathrm{e}^{-kt} \;=\; 22 + 63(e^{-k})^t.$$

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit nach zehn Minuten noch 62° C heiß ist. Damit kann $a = e^{-k}$ (oder direkt $k > 0$) bestimmt werden:

$$22 + 63 \cdot (\mathrm{e}^{-k})^{10} \;=\; y(10) \;=\; 62 \iff \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^{10} \;=\; \frac{40}{63} \iff \mathrm{e}^{-k} \;=\; \left(\frac{40}{63}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$y(t) \;=\; 22 + 63 \cdot \left(\frac{40}{63}\right)^{\frac{t}{10}}. \qquad \Diamond$$

2.6.3 Logistisches Wachstum

Dieses Wachstumsmodell berücksichtigt die Tatsache, dass viele Vorgänge auch zu Beginn der Beobachtung kleine Änderungsraten aufweisen. Das beschränkte Wachstum beinhaltet diese Verkleinerung der Änderungsrate nur für Werte nahe an der Sättigungsschranke S. Ein solches logistisches Wachstum kann durch die Funktion

$$\boxed{y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(t) \;=\; \frac{y(t_0) \cdot S}{y(t_0) + \Big(S - y(t_0)\Big)\mathrm{e}^{-Sk(t-t_0)}}} \tag{4}$$

beschrieben werden.

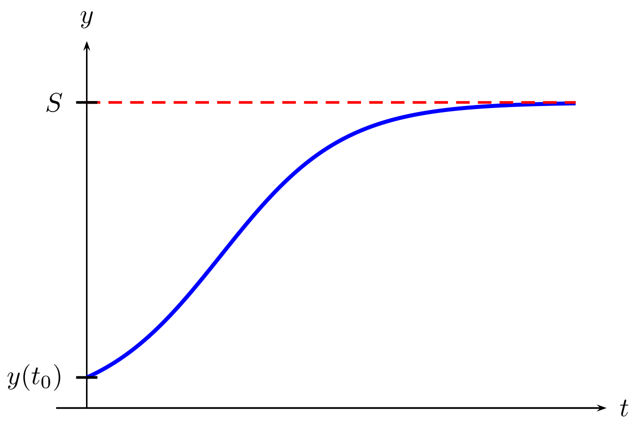


Abbildung 12: Qualitative Skizze eines logistischen Wachstumsprozesses. $y(t_0)$ ist dabei der Anfangsbestand, S die Sättigungsschranke. Es gilt $0 < y(t_0) < y(t) < S$ für jedes $t > t_0$.

Bemerkung 2.23. Genau wie beim beschränkten Wachstum kann man beim logistischen Wachstum auch mit der Zuordnungsvorschrift

$$y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(t) \;=\; \frac{y(t_0) \cdot S}{y(t_0) + \big(S - y(t_0)\big) a^{-S(t-t_0)}}$$

arbeiten. Es gilt $a = \mathrm{e}^{-k}$. $\Diamond$

Beispiel 2.24. Ein Anfangsbestand von Pantoffeltierchen mit einer Konzentration von 1 Pantoffeltierchen/ml wurde unter Laborbedingungen gezüchtet. Es ist bekannt, dass unter diesen Bedingungen eine Konzentration von höchstens 900 Pantoffeltierchen/ml erreicht werden kann. Unterstellen wir für die Konzentration an Pantoffeltierchen $y(t)$, t in Tagen, logistisches Wachstum, so gilt wegen (4) mit $a = \mathrm{e}^{-k}$

$$y(t) \;=\; \frac{900}{1 + 899 \cdot a^{900t}}$$

Zur Bestimmung von $a > 0$ benötigen wir ein weiteres Datenpaar: Nach einer Woche wurde eine Konzentration von 620 Tierchen/ml gemessen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y(7) \;=\; 620 \;&\iff\; \frac{900}{1 + 899 \cdot a^{900\cdot 7}} \;=\; 620 \\ &\iff\; 1 + 899 \cdot a^{900\cdot 7} \;=\; \frac{900}{620} \;=\; \frac{45}{31} \\ &\iff\; a^{900\cdot 7} \;=\; \frac{14}{31 \cdot 899} \\ &\iff\; a \;=\; \left(\frac{14}{27869}\right)^{\frac{1}{900\cdot 7}}. \end{aligned}$$

Also lautet das Wachstumgesetz

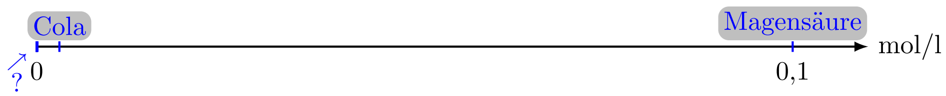
$$y(t) \;=\; \frac{900}{1 + 899 \cdot \left(\frac{14}{27869}\right)^{\frac{t}{7}}}. \qquad \Diamond$$

2.7 Logarithmische Darstellung

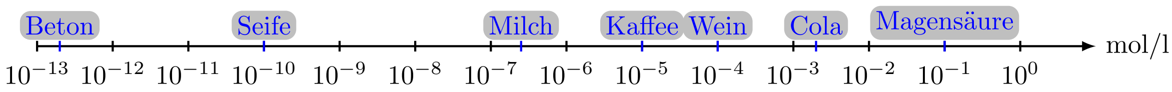
Bei der logarithmischen Darstellung werden die Zahlenwerte auf der Achse einer darzustellenden Größe nicht linear, sondern logarithmisch aufgetragen. Dies ermöglicht die bessere Veranschaulichung von Daten mit starken Größenunterschieden. Die Wasserstoffionen-Konzentration in einer wässrigen Lösung definiert den pH-Wert[2] einer Lösung und gibt an, ob es sich um eine saure, basische oder neutrale Lösung handelt. Eine Lösung wird als neutral bezeichnet, falls sich in einem Liter der Lösung 10^{-7} Mol Oxoniumionen (H_3O^+) befinden. Bei einer höheren Konzentration wird die Lösung sauer genannt und bei einer niedrigeren Konzentration basisch. Die Konzentration erstreckt sich im Allgemeinen von 10^{-14} bis 100 Mol pro Liter. Die folgende Tabelle gibt die durchschnittliche Konzentration der Oxoniumionen in mol/l von einigen Substanzen an:

Substanz	H_3O^+ mol/l
Magensäure	10^{-1}
Cola	$3 \cdot 10^{-3}$
Wein	10^{-4}
Kaffee	10^{-5}
Milch	$4 \cdot 10^{-7}$
Seife	10^{-10}
Beton	$3 \cdot 10^{-13}$

Trägt man diese Werte auf einem Zahlenstrahl auf, so erhält man folgendes Bild:



Ein zuverlässiges Ablesen der Werte ist bei der Visualisierung auf einem (linearen) Zahlenstrahl der Daten nicht möglich. Abgesehen von den Werten für Magensäure und Cola, scheinen alle anderen Werte zusammenzufallen und lassen sich nicht zuverlässig ablesen. Ein besseres Resultat erzielt man, wenn man den Logarithmus der Zahlenwerte aufträgt. Eine derart skalierter Zahlenstrahl wird logarithmische Skala genannt. In diesem Beispiel ist die Anwendung der Logarithmusfunktion zur Basis 10 geeignet.



Bemerkung 2.25. In der logarithmischen Darstellung kann die logarithmisch skalierte Achse natürlich nicht bei 0 beginnen, da der Logarithmus von 0 nicht definiert ist. Man kann stattdessen die Skala bei einem Referenzwert beginnen lassen, den man in Abhängigkeit der Problemstellung wählt. ◊

[2] Der pH-Wert (potentia Hydrogenii) ist der negative dekadische Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10) der Wasserstoffionenaktivität, wobei die Wasserstoffionenaktivität definiert ist als das Produkt der Wasserstoffionenkonzentration und einem sogenannten Aktivitätskoeffizienten.

Statt gleicher Abstände zwischen den Werten sind bei der logarithmischer Skala die Abstände zwischen den Exponenten gleich. Bei der Darstellung von Funktionsgraphen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist es häufig sinnvoll bei einem breiten Definitions- und/ oder Werteintervall entweder eine oder beide der Koordinatenachsen logarithmisch zu skalieren.

Einfach-logarithmische Darstellung

Bei der einfach-logarithmischen Darstellung wird eine Koordinatenachse (x- oder y-Achse) logarithmisch skaliert und die andere Achse in linearer Skalierung belassen.

Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ der Form

$$f(x) = k \cdot a^{\lambda x}$$

mit $k > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei einer logarithmischen Skalierung der y-Achse zur Basis a folgt

$$\log_a \left(f(x)\right) = \log_a \left(k \cdot a^{\lambda x}\right) = \log_a(k) + \log_a \left(a^{\lambda x}\right) = \log_a(k) + \lambda x.$$

Somit ist der Graph von f bei einer logarithmischen Skalierung der y-Achse eine Gerade mit Steigung λ. Der Punkt $\left(0, \log_a(k)\right)$ liegt auf dem Graphen von f.

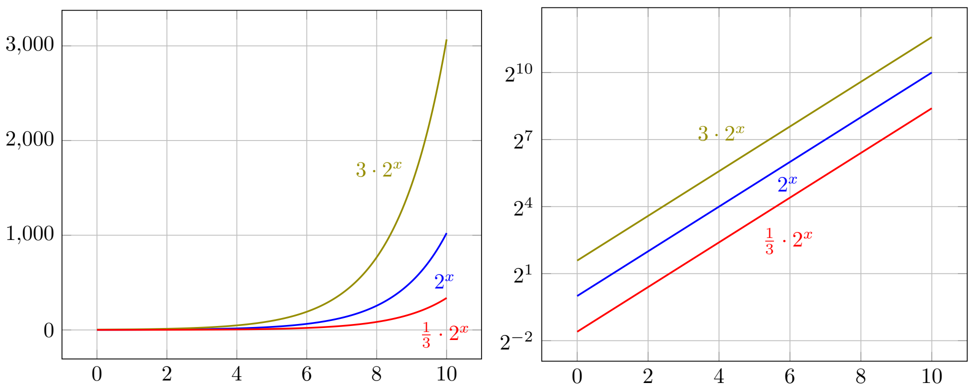


Abbildung 13: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 3 \cdot 2^x$, $f_2(x) = 2^x$ und $f_3(x) = \frac{1}{3}2^x$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 2 auf der y-Achse (rechts)

Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine logarithmische Funktion zur Basis $a > 0$ der Form

$$g(x) = c + k \cdot \log_a(x)$$

mit $c, k \in \mathbb{R}$. Es gilt mit der Setzung $x^* = \log_a(x)$

$$g(x) = c + k \cdot \log_a(x) = c + kx^*.$$

Folglich ist der Graph von g bei einer logarithmischen Skalierung der x-Achse zur Basis a eine Gerade mit Steigung k durch den Punkt (a^0, c).

Diese Darstellungsmethode erlaubt eine Auftragung von Funktionen mit einem sehr breitem Werte- bzw. Definitionsintervall und eine zuverlässige Ablesung der Wertepaare anhand des Funktionsgraphen.

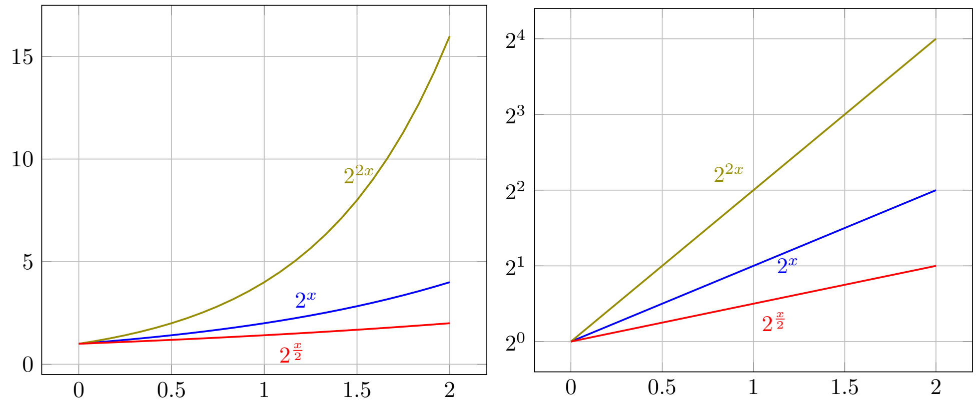


Abbildung 14: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 2^{2x}$, $f_2(x) = 2^x$ und $f_3(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 2 auf der y-Achse (rechts)

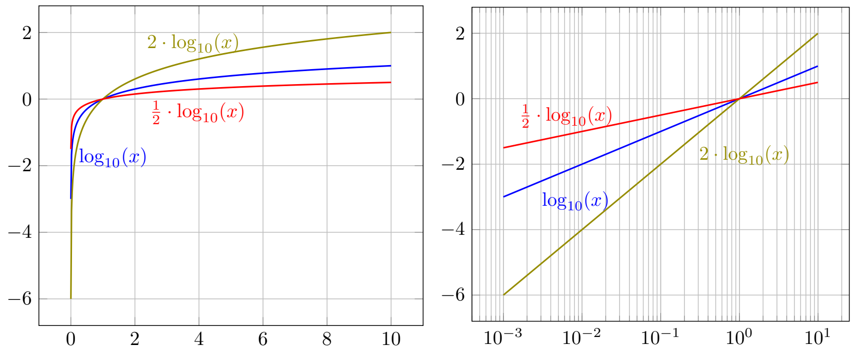


Abbildung 15: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 2\log_{10}(x)$, $f_2(x) = \log_{10}(x)$ und $f_3(x) = \frac{1}{2}\log_{10}(x)$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 10 auf der x-Achse (rechts)

Doppelt-logarithmische Darstellung

In der doppelt-logarithmischen Darstellung werden beide Koordinatenachsen logarithmisch skaliert. Bei der Auftragung von Potenzfunktionen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ der Form

$$f(x) = ax^b$$

mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ auf einem großen Definitionsintervall ist es nicht möglich y-Werte für sehr kleine x-Werte präzise abzulesen. Durch logarithmieren der Funktion folgt

$$f(x) = ax^b \quad \Longrightarrow \quad \log(f(x)) = \log(ax^b) = \log(a) + \log(x^b) = \log(a) + b\log(x).$$

Die Darstellung der Funktion unter Verwendung von zwei logarithmischen Achsen führt zu einer Geraden, die es erlaubt Funktionswerte präzise und sehr leicht abzulesen.

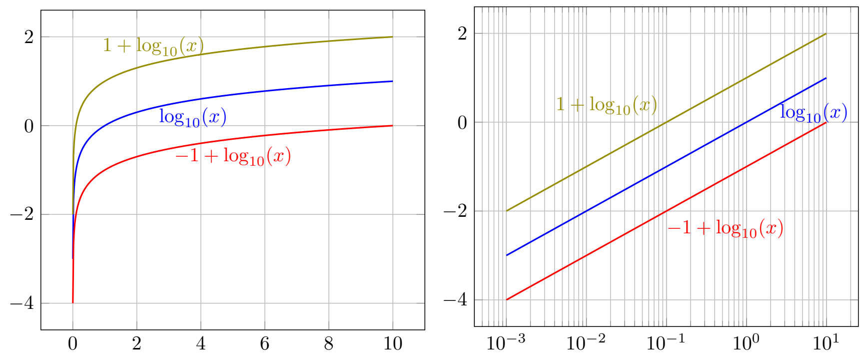


Abbildung 16: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 1 + \log_{10}(x)$, $f_2(x) = \log_{10}(x)$ und $f_3(x) = -1 + \log_{10}(x)$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halblogarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 10 auf der x-Achse (rechts)

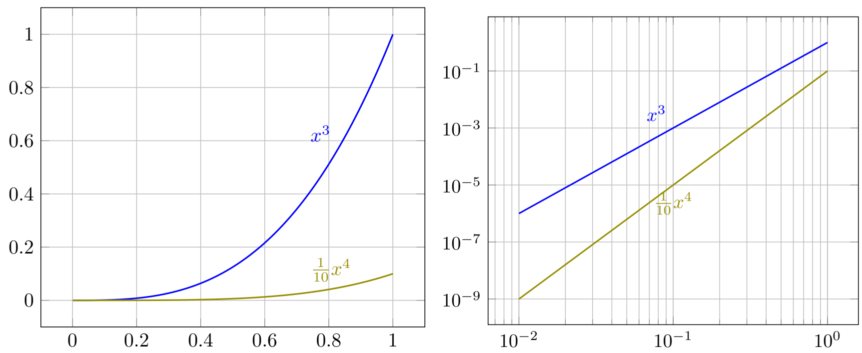


Abbildung 17: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = \frac{1}{10}x^4$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer doppelt-logarithmischen Skala mit logarithmischer Skalierung zur Basis 10 (rechts)

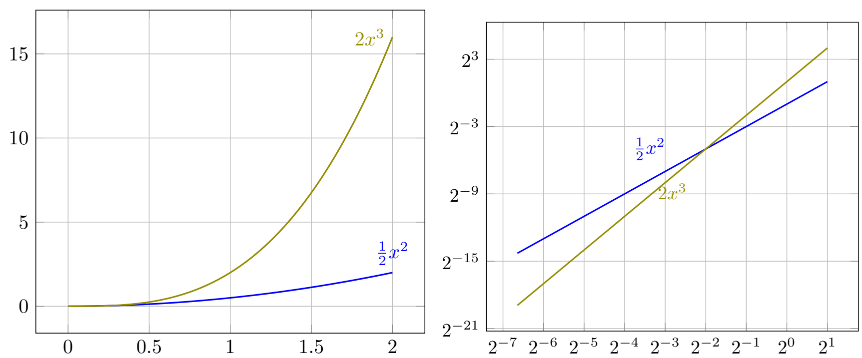


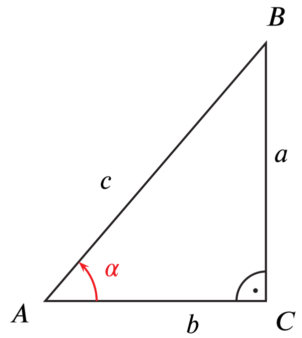
Abbildung 18: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $f_2(x) = 2x^3$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer doppelt-logarithmischen Skala mit logarithmischer Skalierung zur Basis 2 (rechts)

2.8 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen Sinus, Cosinus und die davon abgeleiteten Funktionen Tangens und Cotangens werden zusammen mit ihren Umkehrfunktionen als trigonometrische Funktionen bezeichnet. Die trigonometrischen Funktionen sind neben den Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen die wichtigsten speziellen Funktionen in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Dies kommt zum einen daher, dass sie in der Geometrie, und dabei vor allem in der Trigonometrie ("Dreiecksmessung"), eine zentrale Rolle spielen, zum anderen daher, dass die einfachsten und zugleich wichtigsten Schwingungstypen in biologischen, chemischen oder auch physikalischen Systemen durch sinusförmige Zeitverläufe charakterisiert sind.

Erinnerung: Die drei möglichen Seitenverhältnisse werden ausgehend vom Bezugspunkt A bzw. Winkel α mit $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ bezeichnet:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Meistens geben wir Winkel im Bogenmaß an. Das ist die Länge des Bogenstücks am Einheitskreis, das dem Winkel zugeordnet ist, s. Abbildung 19. Ist ein Winkel ϕ im Gradmaß gegeben, so berechnet sich das zugehörige Bogenmaß t mit der Formel

$$\boxed{t \;=\; \tfrac{\phi}{360°} \cdot 2\pi \;.}$$

Jedem $\phi \in [0, 2\pi)$ können wir in eindeutiger Weise einen Punkt $P(\phi) = (x, y)$ auf der Einheitskreislinie zuordnen, vgl. Abbildung 19. Diese Zuordnung ist injektiv. Gemäß der obigen Betrachtungen in rechtwinkligen Dreiecken gilt nun $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$. Dabei beachten wir die Vorzeichen der x– bzw. y–Werte, die durch das Koordinatensystem vorgegeben sind, d.h. im Beispiel von Abbildung 19 gilt $\cos\phi_1 > 0$ und $\sin\phi_1 > 0$, jedoch $\cos\phi_2 < 0$ und $\sin\phi_2 < 0$.

Auf diese Weise sind Funktionen $\sin : [0, 2\pi) \to [-1, 1]$ und $\cos : [0, 2\pi) \to [-1, 1]$ erklärt. Wir setzen diese Funktionen nun periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort, vgl. Abbildungen 20 und 21: Für $\phi \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\sin(\phi + k\cdot 2\pi) \;=\; \sin(\phi) \qquad \text{und} \qquad \cos(\phi + k\cdot 2\pi) \;=\; \cos(\phi).$$

Es gelten die folgenden Symmetrien der Funktionen sin und cos:

$$\sin(x) = -\sin(-x) \qquad \text{Punktsymmetrie des Sinus zum Ursprung,}$$
$$\cos(x) = \cos(-x) \qquad \text{Achsensymmetrie des Cosinus zur y-Achse.}$$

Auf der Menge

$$T \;=\; \{\phi \in \mathbb{R}\colon\; \cos(\phi) \neq 0\} \;=\; \mathbb{R} \setminus \left\{\phi \in \mathbb{R} : \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

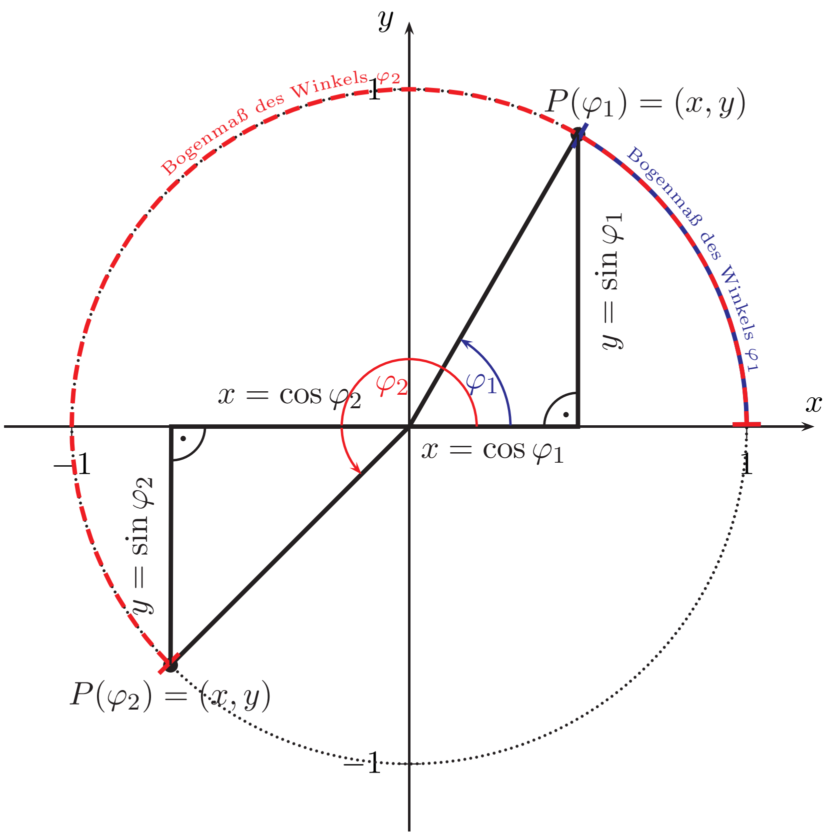


Abbildung 19: Zuordnung eines Winkels ϕ zu einem Punkt auf der Einheitskreislinie und die Größen $\sin\phi$ und $\cos\phi$ im entsprechenden rechtwinkligen Dreieck

definieren wir außerdem (vgl. Abbildung 22)

$$\tan : T \to \mathbb{R}, \qquad \tan(\phi) = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\ .$$

Die folgende Liste enthält einige spezielle Wert der trigonometrischen Funktionen.

Bogenmaß von ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß von ϕ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\phi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\phi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Aus der periodischen Fortsetzung lässt sich unmittelbar

$$\cos(x-\pi) \;=\; \cos(x-\pi+2\pi) \;=\; \cos(x+\pi)$$

und

$$\sin(x-\pi) \;=\; \sin(x-\pi+2\pi) \;=\; \sin(x+\pi)$$

folgern.

Wir halten nun einige Regeln fest, die für Sinus und Cosinus gelten.

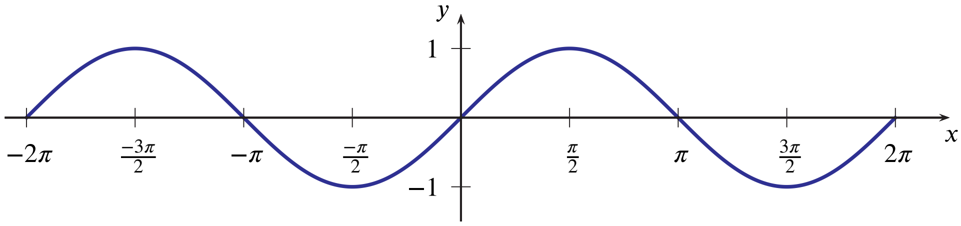


Abbildung 20: Graph von $\sin x$

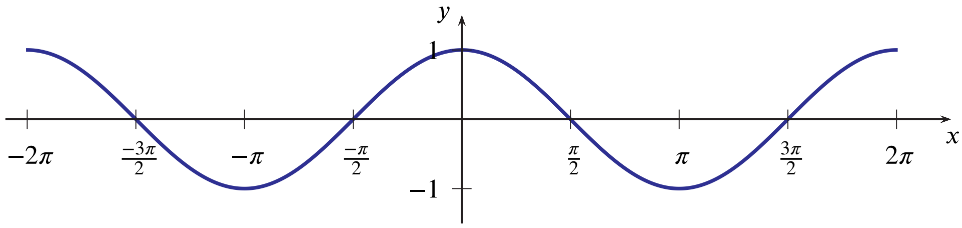


Abbildung 21: Graph von $\cos x$

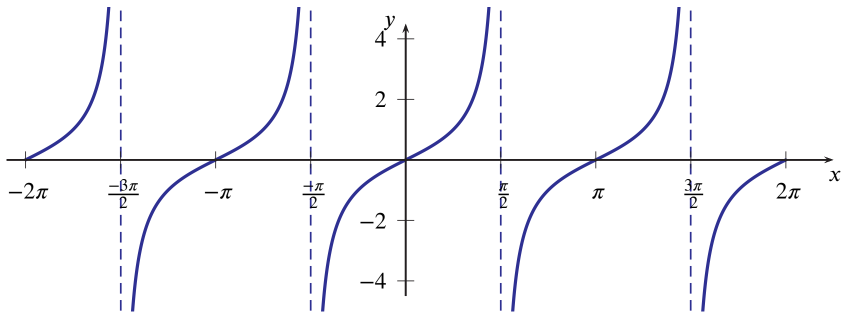


Abbildung 22: Graph von $\tan x$

Satz 2.26 (Einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen)**.**

(i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|\sin(x)| \leqslant 1$ *und* $|\cos(x)| \leqslant 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sin x = 0 \iff x \in \{k \cdot \pi \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

(iv) $\cos x = 0 \iff x \in \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

(v) $\sin(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi) = (-1)^k$ *und* $\cos(k \cdot \pi) = (-1)^k \iff k \in \mathbb{Z}$.

(vi) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Sinus ist also gegenüber Cosinus um* $\frac{\pi}{2}$ *phasenverschoben.*

(vii) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ *und* $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(viii) $\sin(-x) = -\sin(x)$ *und* $\cos(-x) = \cos(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(ix) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Wie jede Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann man die trigonometrischen Funktionen verschieben (entlang der y-Achse und/oder entlang der x-Achse) und stauchen bzw. strecken. Dies ist für viele Anwendungen wichtig.

Für $m \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $w > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(t) &= m + a \cdot \sin(w(t+\theta)), \\ g(t) &= m + a \cdot \cos(w(t+\theta)). \end{aligned}$$

Die verwendeten Parameter erklären sich wie folgt:

- Die Zahl m ist die Mittellage der Funktion, d.h. die Funktion schwingt um den Zustand $y = m$ herum.
- Die Zahl $|a|$ ist die Amplitude der Funktion, d.h. der Abstand von der Mittellage zum Hochpunkt der Funktion.
- Die Zahl w gibt die Winkelgeschwindigkeit an. Diese ergibt sich gemäß

$$w = \frac{2\pi}{\text{Periodenlänge von } f \text{ bzw. } g}.$$

- Die Zahl θ ist die Phasenverschiebung. Sie gibt an, wie weit man den Graphen von f (bzw. g) nach *rechts* verschieben muss, damit er dem Graphen der Funktion $h(t) = m + a\sin(wt)$ (bzw. $h(t) = m + a\cos(wt)$) entspricht.

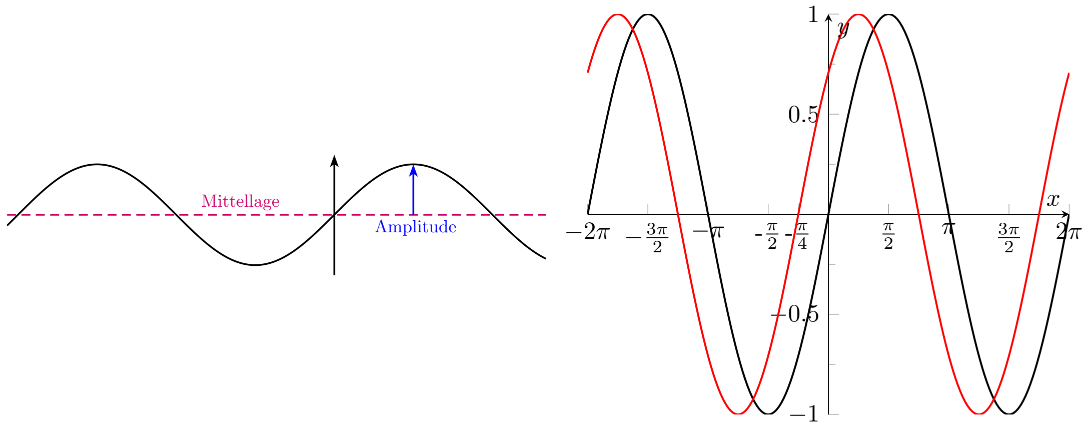


Abbildung 23: Links: Darstellung der Mittellage und Amplitude, Rechts: Beispiel einer Phasenverschiebung für die Sinusfunktion. Es gilt hier $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Beispiel 2.27. Hier sind zwei Beispiele, siehe Abbildung 24. Wir erklären anhand des blauen Graphen, wie man die Funktionsvorschrift ermittelt. Wichtig ist, dass die Darstellung der Lösung nicht eindeutig ist, da Sinus und Cosinus phasenverschoben zueinander sind. Wir können uns also aussuchen, ob wir mit dem Sinusansatz oder mit dem Kosinusansatz arbeiten wollen. Wir sehen bereits, dass der blaue Graph einer modifizierten Sinusfunktion ohne Phasenverschiebung entspricht. Die Mittellage liegt bei $y = -1$. Der Abstand von $y = -1$ und der y-Koordinate des Hochpunkts $y_H = 0.5$ beträgt 1.5, also

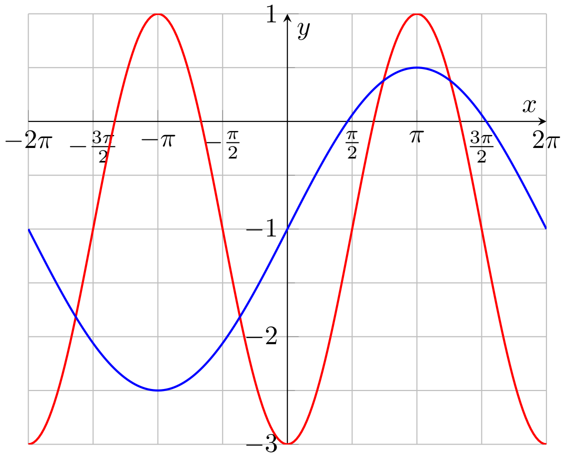


Abbildung 24: Zwei modifizierte Sinusfunktionen.

besitzt die Funktion die Amplitude 1.5. Des Weiteren erkennen wir die Periodenlänge 4π in der Grafik. Unsere Antwort lautet daher

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; -1 + 1.5 \cdot \sin(\tfrac{x}{2}).$$

Selbstverständlich kann man die Phasenverschiebung des Sinus gegenüber des Cosinus ausnutzen um die Funktion als Ausdruck in Cosinus darzustellen. Da laut Satz 2.26 $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$f(x) \;=\; -1 + 1.5 \cdot \sin(\tfrac{x}{2}) \;=\; -1 + 1.5 \cdot \cos(\tfrac{x}{2} - \tfrac{\pi}{2}) \;=\; -1 + 1.5 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}(x - \pi)\right).$$

Für den roten Graphen ergibt sich übrigens analog $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos(x - \pi)$. $\diamondsuit$

Schränken wir die Funktionen sin, cos und tan auf geeignete Teilintervalle von $\mathbb{R}$ ein, so sind diese Funktionen bijektiv[3] und wir können auf den entsprechenden Defintions- und Wertebereichen deren Umkehrfunktionen arcsin, arccos und arctan betrachten[4].
Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

[3]Es gibt viele Möglichkeiten, Teilintervalle mit dieser Eigenschaft festzulegen. Wir entscheiden uns hier für eine naheliegende Variante; man bezeichnet diese eingeschränkten Funktionen als *Hauptzweig* der entsprechenden Umkehrfunktion.

[4]Auf Taschenrechnern werden diese Funktionen in Anlehnung an die Bezeichnung f^{-1} für die Umkehrfunktion einer Funktion f auch mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ bezeichnet.

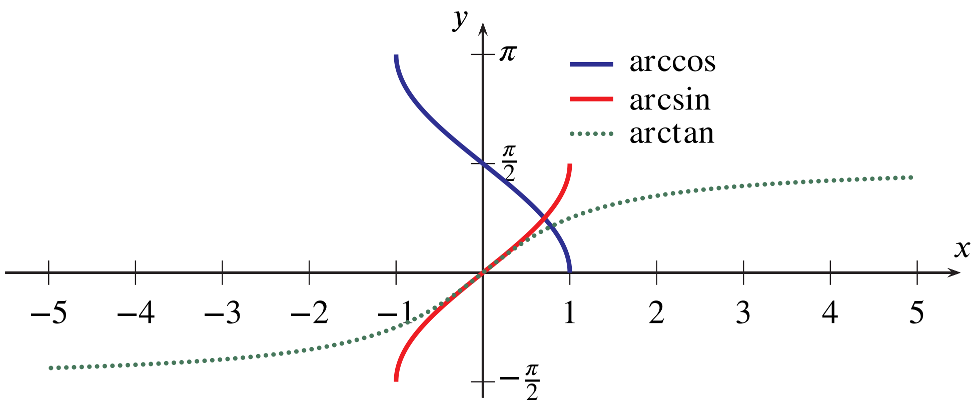


Abbildung 25: Graphen der drei Arkusfunktionen